MA1 – přednáška 6.11.

① Příklady na lineární aproximace funkce
(v okolí bodu, kde existují vlastní derivace funkce)

minule: ex. $f'(a) \in \mathbb{R}$, pak $f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a)$ „blízko" a

($f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \omega(x-a)$, kde $\lim\limits_{x \to a} \frac{\omega(x-a)}{x-a} = 0$)

a) $f(x) = e^x;\ a = 0$:

$f(0) = f'(0) = 1$, tedy $e^x \cong 1 + x$ v okolí bodu 0

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $a = 0$:

$f(0) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, tedy $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x$

c) $f(x) = \ln(1 + \sin(4x))$, $a = 0$:

$f(0) = \ln 1 = 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+\sin(4x)} \cdot \cos(4x) \cdot 4$, $f'(0) = 4$,

tedy $\ln(1 + \sin(4x)) \cong 4x$ v okolí bodu 0

Poznámka (bylo na minulé přednášce) – jednoznačnost lineární aproximace v okolí bodu a s chybou $\omega(x-a)$, kde $\lim\limits_{x \to a} \frac{\omega(x-a)}{x-a} = 0$.

Je-li $y = f(a) + k(x-a)$ taková lineární funkce, že

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - (f(a) + k(x-a))}{x-a} = 0, \text{ pak } \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - k \right) = 0,$$

a tedy $k = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$.

(2) Definice diferenciálu funkce

nechť ex. $f'(x) \in R$, pak lze lineární aproximaci také „napsat" (v okolí bodu $\underline{x}$)

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \omega(h), \quad \lim_{h \to} \frac{\omega(h)}{h} = 0$$

Výraz $f'(x) \cdot h$ „aproximuje" změnu funkce

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + \omega(h)$$

a nazývá se diferenciál funkce f v bodě x a přírůstku h –

označení: $\quad df(x)(h) = f'(x) \cdot h$

Spec: $\quad f(x) = x$, pak $df(x)(h) = 1 \cdot h$,
a tedy (v přírodních vědách hlavně)
se značí $\quad h = dx$,

tedy $\quad \underline{df(x) = f'(x)dx \quad \text{(obvykle)}}$

označme-li $\quad \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$, pak

$$\underline{\Delta f(x) \cong df(x)(\Delta x)}$$

1. Příklad: objem koule o poloměru R ... $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ – jaká je lineární aproximace změny objemu koule, když změníme R na $R + \Delta R$?

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad \Delta V = \frac{4}{3}\pi\left[(R+\Delta R)^3 - R^3\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left[\cancel{R^3} + 3R^2\Delta R + 3R(\Delta R)^2 + (\Delta R)^3 - \cancel{R^3}\right] =$$

$$= 4\pi R^2 \Delta R + 4\pi R(\Delta R)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta R)^3$$

$V'(R) = 4\pi R^2$, tedy $dV = 4\pi R^2 \Delta R$

Tedy máme: $\Delta V = dV + 4\pi R(\Delta R^2) + \frac{4}{3}\pi(\Delta R)^3$

a chyba aproximace je $\Delta V - dV = 4\pi R(\Delta R^2) + \frac{4}{3}\pi(\Delta R)^3$,

a vidíme, že $\lim\limits_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V - dV}{\Delta R} = \lim\limits_{\Delta R \to 0} 4\pi\left(R\Delta R + \frac{\Delta R^2}{3}\right) = 0$

2. příklad – relativní chyba měření veličiny f ... $\frac{\Delta f}{f}$:

pak lze: $\frac{\Delta f}{f} \cong \frac{df}{f}$ při výpočtu relativní chyby

a) pak pro $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ je relativní chyba výpočtu

$$\frac{\Delta V}{V} \cong \frac{dV}{V} = \frac{4\pi R^2 \Delta R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3\frac{\Delta R}{R}$$

b) relativní chyba výpočtu veličiny $(f \cdot g)(x)$:

$$\frac{\Delta(f \cdot g)(x)}{(f g)(x)} \cong \frac{d(f \cdot g)(x)}{(f \cdot g)(x)} = \frac{(f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx}{f(x) \cdot g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)dx}{f(x)} + \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \frac{df(x)}{f(x)} + \frac{dg(x)}{g(x)}$$

(tedy, relativní chyba součinu je součtem relativních chyb činitelů) (a podobně lze odvodit relativní chybu mocnin, podílu)

3. Derivace vyšších řádů funkce – viz přednáška 4.11.

(4) Další využití derivací – pro chování funkce na intervalu:

Pokus o „průběh" funkce $f(x) = x^2 e^{-x}$ –

– co víme a co ještě je třeba prozkoumat?

1) $Df = R$, $f(x) \geq 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ – zřejmě zde je nejmenší hodnota funkce v Df – globální minimum

1. otázka: vyšetřování extrémů funkce $\overset{?}{\longleftarrow}$

2) hodně „poznáme" z limit:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = \text{„}\infty \cdot \infty\text{"} = \infty$$

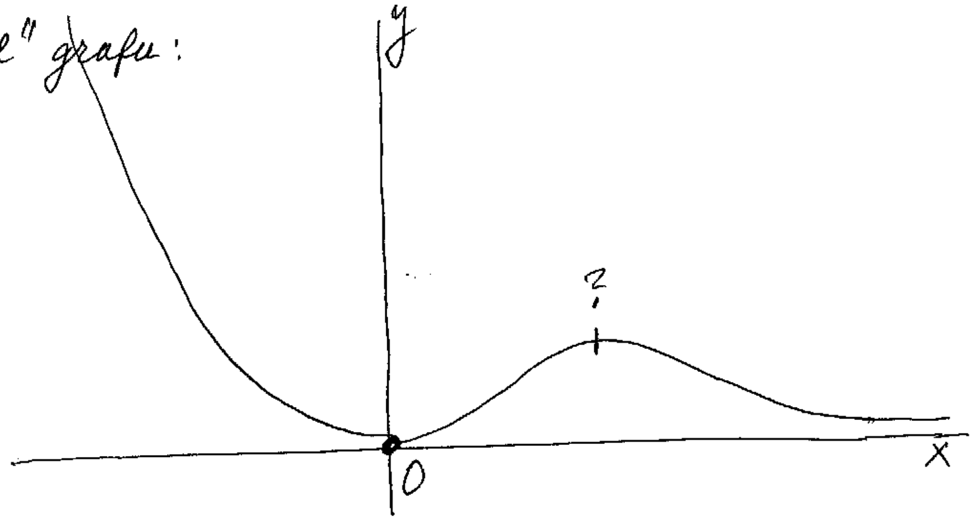
$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = \text{„}\infty \cdot 0\text{"} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \ ?(0)?\ (\text{asi})$$

(neumíme upravit, ukážeme, jak lze najít tuto limitu pomocí „rychlosti")

2. otázka: nějaký návod pro limity „$\frac{0}{0}$", „$\frac{\infty}{\infty}$" pomocí derivací $\longleftarrow$

3) jak se chová funkce „mezi" limitami a hodnotou v bodě 0 ($f(0)=0$)?

Zkusme „odhad" grafu:



Co víme : 1, f je spojitá v R

2, ex. $f'(x)$ v R ⇒ graf f má v každém bodě (vlastní) tečnu (nemá „špičky") – f je „hladká"

3, v intervalu $(-\infty, 0)$ je f klesající
(lze dokázat z definice):
$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow x_1^2 e^{-x_1} > x_2^2 e^{-x_1} \Rightarrow$
$(e^{-x_1} > 0)$ $e^{-x_2} > 0$
a $e^{-x_1} > e^{-x_2} \mid \cdot x_2^2$
$x_1^2 e^{-x_1} > x_2^2 e^{-x_1} > x_2^2 e^{-x_2}$

<u>Ale nevíme</u> 4, ? kde je „vrchol" grafu v $(0, +\infty)$?
tj. maximální hodnota na intervalu $(0, +\infty)$?
$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$ ⇒ funkce nemá největší hodnotu v Df (tj. globální maximum funkce nemá)

v $(0, +\infty)$ – <u>hledáme lokální maximum</u> – jak?
(analogicky i lokální minimum)

zatím intuitivně (příště přesné formulace definic, a pravidel)

<u>Platí</u>: Je-li v bodě $a \in Df$ extrém a ex.-li $f'(a) \Rightarrow f'(a) = 0$
(nutná podmínka extrému)
(a – stacionární bod funkce)

Tedy: vypočítáme $f'(x)$ a body, kde $f'(x)=0$ – body „podezřelé" z extrému

$$f'(x) = (x^2 e^{-x})' = 2x e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x}(-1) = x(2-x)e^{-x}$$

$f'(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = 2$ – stacionární body

$a=0$ – už víme, že zde je globální minimum

$a=2$ – asi lokální maximum – jak ověříme?

stačilo by ukázat, že f je rostoucí v $\langle 0,2 \rangle$ a klesající v $\langle 2,+\infty)$ – pomocí derivace lze:

Věta. $f'(x) > 0$ v (a,b) $\Rightarrow$ f je rostoucí v (a,b)
(je-li f spojitá v $\langle a,b \rangle$, je f rostoucí v $\langle a,b \rangle$);
$f'(x) < 0$ v (a,b) $\Rightarrow$ f je klesající v (a,b)
(je-li navíc f spojitá v $\langle a,b \rangle$, je klesající v $\langle a,b \rangle$)

Tedy zde: hledáme znaménko $f'(x) = x(2-x) \cdot e^{-x}$

		0		2	
f':	$-$		$+$		$-$
f:	$\searrow$ (f klesá) v $(-\infty,0\rangle$		$\nearrow$ (f roste v $\langle 0,2\rangle$)		$\searrow$ f klesá v $\langle 2,+\infty)$

, a odtud plyne,

že v bodě $x=2$ je ostré lokální maximum

(definice přesně příště)

5) „prohnutí" grafu funkce

($\cap$ – konkávní v (a,b), $\cup$ – konvexní v (a,b),
„přechod" od konkávní ke konvexní" (nebo obráceně) –
– inflexní bod) – jak se toto „pozná"?

u funkce $f(x) = x^2 e^{-x}$ – u lokálního maxima $\cap$
u minima $\cup$
někde „za maximem" – inflexní bod ($\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ a $f(x) > 0$)

Věta: a) $f''(x) > 0$ v (a,b) $\Rightarrow$ f je konvexní v (a,b)
b) $f''(x) < 0$ v (a,b) $\Rightarrow$ f je konkávní v (a,b)
c) je-li $[c, f(c)]$ inflexní bod f, a $f''(a) \in R$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow f''(a) = 0$

Tedy zde: $f''(x) = \left((2x - x^2)e^{-x}\right)' = (2-2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} =$
$= e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

$f''(x)$ je spojitá funkce, znaménko opět může měnit jen v nulových bodech, tj.

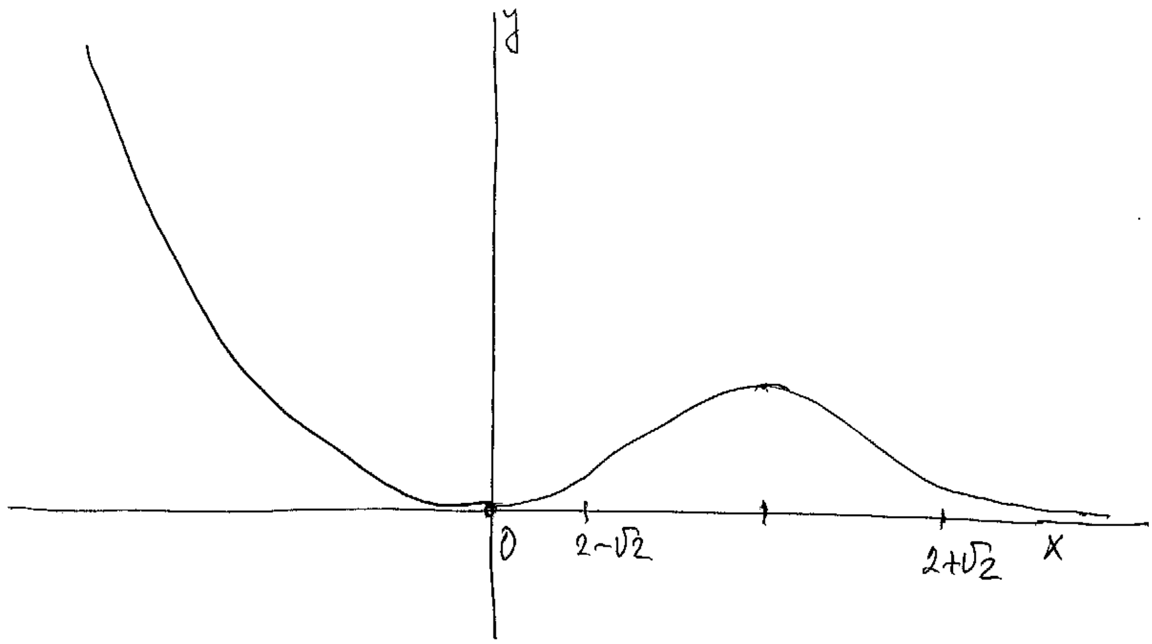
f'':	$+$		$-$		$-$		$+$
f:	$\cup$	$2-\sqrt{2}$	$\cap$	2	$\cap$	$2+\sqrt{2}$	$\cup$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$

tj. v bodech $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ má f inflexi

Vyšetřený graf: $\left(f(2) = \frac{4}{e^2}\right)$

4



6) Chybí ještě návod pro výpočet limit typu $\frac{\infty}{\infty}$ a $\frac{0}{0}$ pomocí derivací:

Věta (l'Hospitalovo pravidlo)

A) 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

$a \in R^*$

2) existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\Rightarrow$ existuje i $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

B) 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

$(a \in R^*)$

2) ex. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

$\Rightarrow$ existuje i $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a

$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Poznámky: 1) věta není ekvivalence, tj.: limita $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ může existovat, i když funkce $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ v bodě $\underline{a}$ limitu nemá

Př. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{\cos x}{x}\right)} = 1$$

(neboť $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} = 1$ (VOS))

ale $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x + \cos x)'} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$ neexistuje

2) při použití l'Hospitalova pravidla je třeba ověřit předpoklady věty!

$\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \left(= \frac{1}{0^+}\right)$ ale použije-li l'Hospitalovo pravidlo (nesprávně) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{0}{1} = 0$!!

3) l'Hospitalovo pravidlo lze užít i pro limity typu „$\frac{\text{cokoliv}}{\infty}$" – ale není třeba – („$\frac{L}{\infty} = 0$" a „$\frac{\text{omez.}}{\infty} = 0$")

Příklady:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = „\frac{\infty}{\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = „\frac{\infty}{\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{3x^2} = „\frac{\infty}{\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{6x} =$

$= „\frac{\infty}{\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{6} = \infty$ (l'H. pravidlo lze užít opakovaně, pokud jsou splněny předpoklady)

(analog. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ n\in N}} \frac{e^x}{x^n} = \infty$)

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = „\frac{\infty}{\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = „\frac{1}{\infty}" = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+3x^2)} = „\frac{0}{0}" \underset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot \cancel{2x}}{\frac{1}{1+3x^2}\cdot 6\cancel{x}} \underset{AL}{=}$

$= \frac{1}{3}$

5) $\lim\limits_{x\to 0+} x\,.\ln x = „0.(-\infty)" = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = „\frac{-\infty}{+\infty}"$

$\underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} (-x) = 0$

6) a odtud: $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln x} \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{t\to 0} e^t = 1$